

# UFC

## Computação Gráfica

Henricky de Lima Monteiro

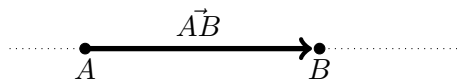
2024.1

## 1 Revisão de Álgebra

### 1.1 Vetores

---

**Definição 1.1 (Vetor):** Um vetor é determinado por um **segmento orientado**  $\overrightarrow{AB}$ , representando o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a  $\overrightarrow{AB}$ .



Em particular, os segmentos nulos são representantes de um único vetor, chamado **vetor nulo**, indicado por  $\vec{0}$ . Assim como, os segmentos com magnitude igual a 1 que, frequentemente, são utilizados para indicar as direções, chamado **vetor unitário**, indicado por  $\hat{u}$ .

Algebricamente, um vetor em  $\mathbb{R}^n$  é **representado** como uma  $n$ -upla ordenada de números reais. Por exemplo, em  $\mathbb{R}^3$ , um vetor  $\vec{v}$  pode ser escrito como:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

ou em **notação matricial** ou coluna:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Na geometria analítica, um vetor  $\vec{v}$  é frequentemente representado de **forma cartesiana** em termos da base ortonormal, ou canônica,  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ :

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

onde  $\hat{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{j} = (0, 1, 0)$  e  $\hat{k} = (0, 0, 1)$  são os vetores unitários ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

---

### 1.1.1 Operações com Vetores

---

**Definição 1.2 (Soma de Vetores):** Dado  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  e  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , a soma  $\vec{u} + \vec{v}$  é dada por:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$$

A soma de vetores resulta em um vetor que representa a combinação das direções e magnitudes dos vetores somados.

---

---

**Definição 1.3 (Subtração de Vetores):** Dado  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  e  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , a subtração  $\vec{u} - \vec{v}$  é dada por:

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - v_z)$$

A subtração de vetores resulta em um vetor que aponta da extremidade de  $\vec{v}$  para a extremidade de  $\vec{u}$ .

---

---

**Definição 1.4 (Multiplicação por um Escalar):** Dado um vetor  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  e um escalar  $\lambda$ , a multiplicação  $\vec{v} \cdot \lambda$  é dada por:

$$\vec{v} \cdot \lambda = (v_x \lambda, v_y \lambda, v_z \lambda)$$

Multiplicar um vetor por um escalar altera sua magnitude sem mudar sua direção (se  $\lambda$  for positivo).

---

---

**Definição 1.5 (Módulo de um Vetor):** O módulo ou magnitude de um vetor  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  é dado por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

O módulo representa o comprimento do vetor e é essencial para normalização e cálculos de distância.

---

---

**Definição 1.6 (Normalização de Vetor):** Para normalizar um vetor  $\vec{v}$ , divide-se o vetor pelo seu módulo:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

O vetor normalizado tem magnitude 1 e é chamado de vetor unitário, frequentemente usado para indicar direções.

---

---

**Definição 1.7 (Produto Escalar):** Dado  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  e  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , o produto escalar é dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Também pode ser expresso em termos do ângulo  $\theta$  entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

O produto escalar mede a quantidade de um vetor na direção de outro e é útil para calcular ângulos e projeções.

---

---

**Definição 1.8 (Ângulo entre Vetores):** O ângulo  $\theta$  entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  pode ser encontrado usando o produto escalar:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$
$$\theta = \arccos \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$$

Este ângulo é importante para determinar a relação direcional entre vetores e é utilizado em cálculos de iluminação e ângulos em CG.

---

---

**Definição 1.9 (Produto Vetorial):** Dado  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  e  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , o produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{v}$ , é uma operação binária que resulta em um novo vetor perpendicular (Ortogonal) a ambos os vetores originais, é dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Expandindo o determinante (Apêndice A), obtemos a expressão em termos dos componentes cartesianos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (u_y v_z - u_z v_y) \hat{\mathbf{i}} - (u_x v_z - u_z v_x) \hat{\mathbf{j}} + (u_x v_y - u_y v_x) \hat{\mathbf{k}} \\ &= (u_y v_z - u_z v_y, u_x v_z - u_z v_x, u_x v_y - u_y v_x) \end{aligned}$$

Ou, em termos do ângulo  $\theta$  entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ :

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

O produto vetorial resulta em um vetor ortogonal aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e é usado para calcular normais em superfícies.

**Definição 1.10 (Projeção de Vetor):** A projeção de um vetor  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$  é dada por:

$$\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

A projeção representa a sombra de  $\vec{u}$  na direção de  $\vec{v}$  e é útil em cálculos de sombras e iluminação em CG.

## 1.2 Coordenadas Homogêneas

**Definição 1.11 (Coordenadas Homogêneas):** As coordenadas homogêneas são uma extensão das coordenadas cartesianas utilizadas para representar pontos no espaços. Em álgebra, um ponto  $P$  no espaço  $\mathbb{R}^n$  é representado por uma  $n$ -upla

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

, enquanto em coordenadas homogêneas, é representado por uma  $(n + 1)$ -upla

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n, w)$$

, onde  $w \neq 0$  é um fator de escala. No  $\mathbb{R}^3$ , temos

$$P = (x, y, z, w)$$

Para transformar um ponto das coordenadas homogêneas para coordenadas cartesianas, divide-se cada componente pelo último elemento:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, w) \rightarrow \left( \frac{x_1}{w}, \frac{x_2}{w}, \dots, \frac{x_n}{w} \right)$$

As coordenadas homogêneas permitem a representação de pontos no infinito, correspondendo ao caso onde  $w = 0$ .

Quando  $w = 1$ , a transformação entre os espaços é direta de modo que,  $(x, y, 1)$ , no sistema homogêneo, tem os mesmos valores no espaço cartesiano  $\mathbb{R}^2 (x, y)$ .

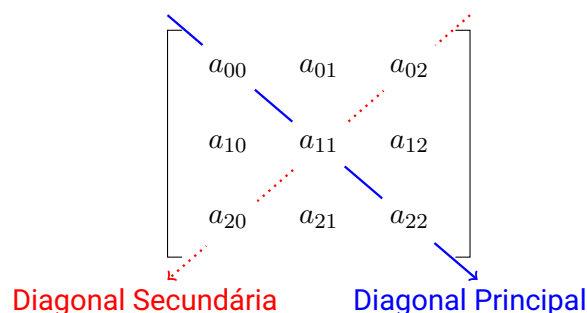
No contexto da Computação Gráfica, as coordenadas homogêneas são amplamente utilizadas para aplicar transformações geométricas (como translações, rotações e escalas) de forma eficiente e unificada através de multiplicações matriciais, facilitando a manipulação e projeção de objetos no espaço tridimensional.

### 1.3 Matrizes

**Definição 1.12 (Matrizes):** Dados  $m$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ , números naturais não nulos. Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$ ,  $m$  por  $n$ , uma tabela formada por números  $\mathbb{R}$  distribuídos em  $m$  linhas e  $n$  colunas, onde cada elemento é indicado por  $a_{ij}$ , onde  $i$  é o índice da linha e  $j$  é o índice da coluna.

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Em uma matriz quadrada ( $m = n$ ), podemos identificar duas diagonais principais. A **diagonal principal** é composta pelos elementos  $a_{ii}$ , onde  $i = j$ . Já a **diagonal secundária** é formada pelos elementos  $a_{i(n-i+1)}$ .



Além disto, existem algumas matrizes notáveis, como:

- **Identidade:** Toda matriz que os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e o resto zero.

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Nula:** Todos os elementos são iguais a zero.

$$0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

]

- **Quadrada:**  $m = n$

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- **Linha:**  $m = 1$

$$A_{1 \times 3} = (1.3 \quad \pi \quad -57)$$

- **Coluna:**  $n = 1$

$$A_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

---

**Definição 1.13 (Soma de Matrizes):** Dadas duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  de mesma dimensão  $m \times n$ , a soma das matrizes  $A + B$  é dada por:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

A soma de matrizes é comutativa, ou seja,  $A + B = B + A$ , e associativa, ou seja,  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .

---

**Definição 1.14 (Multiplicação de Matrizes):** Dadas duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ , o produto  $A \cdot B$  resulta em uma matriz  $C = (c_{ij})_{m \times p}$  onde cada elemento  $c_{ij}$  é dado por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Ou seja,

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

A multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, em geral  $A \cdot B \neq B \cdot A$ . No entanto, é associativa, ou seja,  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ , e é distributiva em relação à adição:  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ .

---

---

**Definição 1.15 (Matriz Transposta):** A transposta de uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  é uma matriz  $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ , obtida trocando as linhas pelas colunas da matriz original:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Uma propriedade importante da transposta é que a transposta do produto de duas matrizes é o produto das transpostas na ordem inversa:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

---

---

**Definição 1.16 (Matriz Inversa):** Dada uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , a matriz inversa  $A^{-1}$  é definida como a matriz que, quando multiplicada por  $A$ , resulta na matriz identidade  $I_n$ :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

A matriz  $A$  é invertível (ou não singular) se e somente se o determinante de  $A$  for diferente de zero, ou seja,  $\det(A) \neq 0$ .

---

---

**Definição 1.17 (Propriedades Adicionais):** Além das operações básicas, algumas propriedades importantes das matrizes no contexto de computação gráfica incluem:

- **Associatividade da Multiplicação:**  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- **Distributividade:**  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- **Comutatividade da Adição:**  $A + B = B + A$
- **Transposta de uma Transposta:**  $(A^T)^T = A$
- **Transposta de um Produto:**  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- **Inversa de um Produto:**  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

---

## 1.4 Transformações

Em computação gráfica, um objeto é uma entidade visual que é exibida na tela. Para que um objeto possa ser desenhado e renderizado, ele deve ser representado por um conjunto  $P$  de vetores denominados **vértices**. Vértices são pontos no espaço que definem a forma e a geometria do objeto.

Para aplicar uma **transformação linear**  $T$  em múltiplos vértices simultaneamente, podemos organizar os vértices como colunas de uma matriz  $P$  e aplicar a transformação  $T$  a  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix}$$

Um exemplo de transformação  $T$  como rotação em torno do eixo  $z$  por um ângulo  $\gamma$  é dada por:

$$T_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz resultante  $P'$  após a transformação é:

$$P' = T_z(\gamma) \cdot P$$

onde  $P'$  contém os vértices transformados.

---

**Definição 1.18 (Translação):** A translação em  $\mathbb{R}^3$  é uma transformação afim que move um

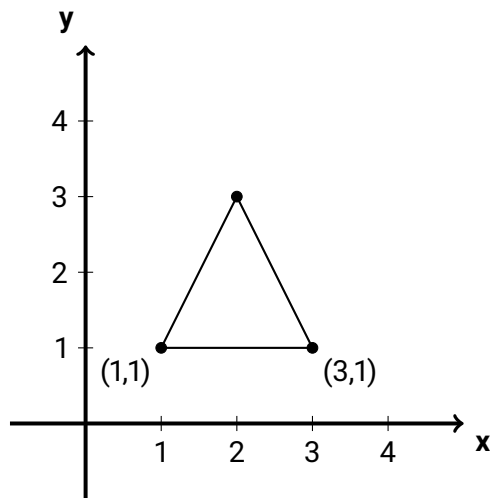
vetor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  por uma distância fixa, determinada por um vetor de translação  $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$ .

Em coordenadas homogêneas, a translação é representada pela multiplicação do vetor  $\vec{v}$  por uma matriz de translação  $T$ :

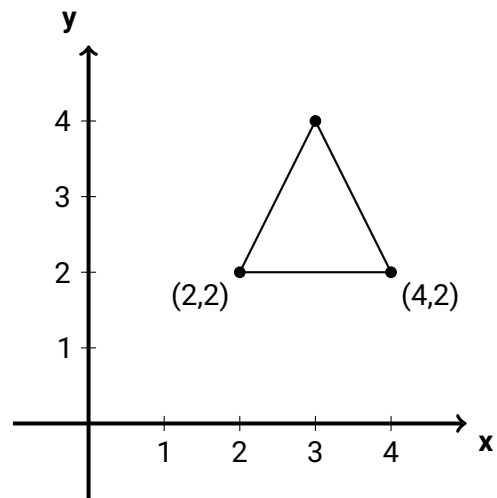
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{t}_x \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{t}_y \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{t}_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde  $\vec{u}' = (v_x + t_x, v_y + t_y, v_z + t_z)$  é o vetor transladado.



Antes da Translação



Depois da Translação

**Definição 1.19 (Rotação):** Uma rotação em  $\mathbb{R}^3$  é uma transformação linear que gira um vetor

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  em torno de um eixo de rotação por um ângulo  $\theta$ . A rotação em torno dos eixos

coordenados é representada pelas seguintes matrizes de rotação:

- $\mathbf{R}_x(\alpha)$  - Rotação em torno do eixo  $x$  por um ângulo  $\alpha$ :

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{R}_y(\beta)$  - Rotação em torno do eixo  $y$  por um ângulo  $\beta$ :

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{R}_z(\gamma)$  - Rotação em torno do eixo  $z$  por um ângulo  $\gamma$ :

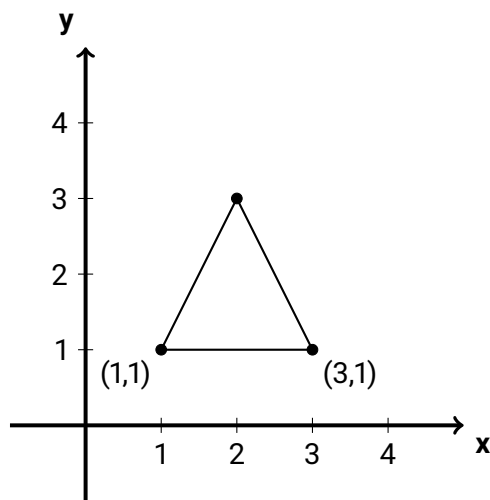
$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

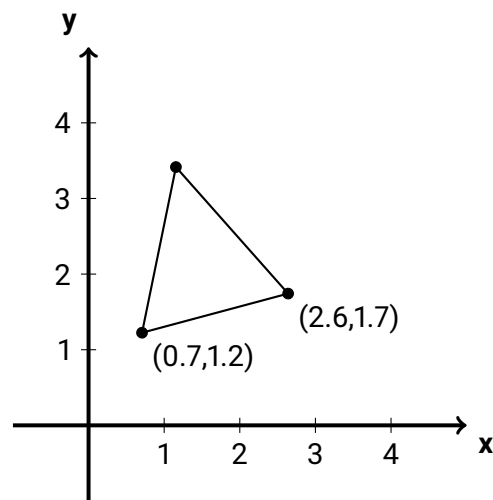
A rotação 2D em torno do eixo  $z$  é um caso especial da rotação 3D onde o vetor  $\vec{v}$  está no plano  $xy$  (ou seja,  $v_z = 0$ ) e a matriz de rotação é:

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

onde  $\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}$  é o vetor resultante após a rotação.



Antes da Rotação



Depois da Rotação  $R_z(15)$

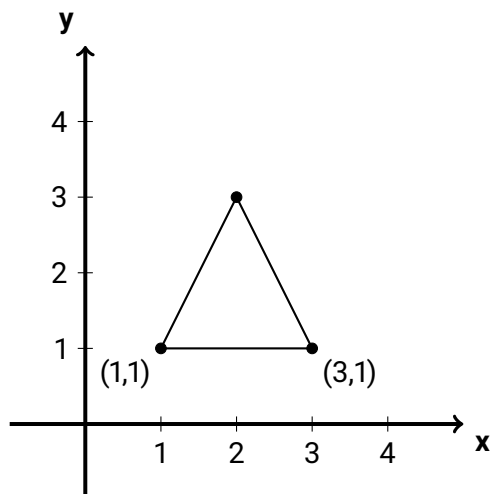
**Definição 1.20 (Escala):** A escala em  $\mathbb{R}^3$  é uma transformação linear que altera o tamanho

de um vetor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  por fatores de escala  $s_x$ ,  $s_y$ , e  $s_z$  ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , respectivamente. A transformação de escala é dada pela multiplicação do vetor  $\vec{v}$  por uma matriz de escala  $S$ :

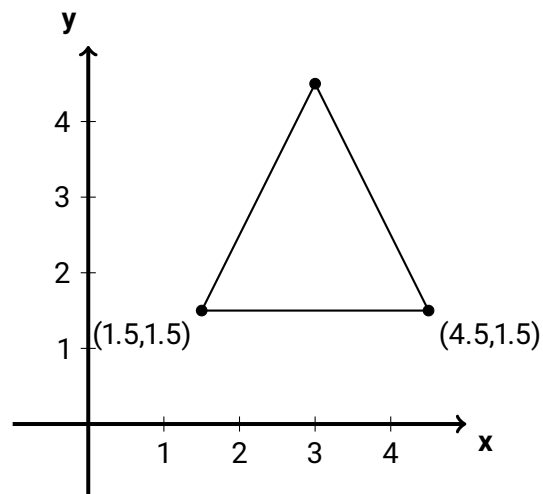
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

onde  $\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}$  é o vetor resultante após a escala.



Antes da Escala



Depois da Escala (1.5)

**Definição 1.21 (Cisalhamento **verificar e complementar**):** O cisalhamento em  $\mathbb{R}^3$  é uma transformação linear que distorce um vetor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  ao longo de um plano específico. Por exemplo, o cisalhamento no plano  $xy$  é dado pela multiplicação do vetor  $\vec{v}$  por uma matriz de cisalhamento  $H$ :

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k_{xy} & 0 \\ k_{yx} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

onde  $\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}$  é o vetor resultante após o cisalhamento, e  $k_{xy}$  e  $k_{yx}$  são os fatores de cisalhamento.

**Definição 1.22 (Reflexão):** A reflexão em  $\mathbb{R}^3$  é uma transformação linear que espelha um vetor

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  em relação a um plano. Por exemplo, a reflexão em relação ao plano  $xy$  é dada pela multiplicação do vetor  $\vec{v}$  por uma matriz de reflexão  $M_{xy}$ :

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

onde  $\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}$  é o vetor resultante após a reflexão.

---

## 1.5 Transformações Locais e Globais

Em computação gráfica, a **ordem das transformações aplicadas** a um objeto pode afetar significativamente o resultado final. As transformações podem ser aplicadas no nível **local** (do objeto) ou no nível **global** (da cena), e a ordem de aplicação dessas transformações pode variar dependendo do contexto.

- **Transformações Locais:** São aplicadas diretamente no sistema de coordenadas do objeto. No contexto local, a ordem comum das transformações é:

$$R \cdot S \cdot T$$

1. **Rotação:** Primeiro, o objeto é rotacionado ao redor de seu sistema de coordenadas local.
2. **Escala:** Em seguida, o objeto é escalado em seu sistema de coordenadas local.
3. **Translação:** Por último, o objeto é transladado em relação ao seu próprio sistema de coordenadas.

Essa ordem garante que o objeto seja rotacionado e escalado antes de ser movido para sua posição final.

- **Transformações Globais:** São aplicadas no sistema de coordenadas global, afetando a posição e a orientação do objeto no espaço da cena. No contexto global, a ordem comum das transformações é:

$$T \cdot S \cdot R$$

1. **Translação:** Primeiro, o objeto é movido para sua posição desejada no espaço global.
2. **Escala:** Em seguida, o objeto é escalado em relação ao sistema de coordenadas global.

3. **Rotação:** Por último, o objeto é rotacionado ao redor do ponto de origem global.

Essa ordem garante que o objeto seja movido para sua posição global antes de ser escalado e rotacionado.

A ordem na qual as transformações são aplicadas é crucial, pois altera o resultado final. A transformação final do objeto é o produto da aplicação sequencial das transformações locais ou globais.

## 1.6 Mudança de Base

A mudança de base pode ser descrita formalmente como o processo de reescrever um vetor em termos de um novo sistema de coordenadas.

---

**Definição 1.23 (Mudança de Base):** A **mudança de base** é uma transformação linear que converte as coordenadas de um vetor de uma base canônica  $C$  para uma base  $B$ . Se  $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  e  $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ , a mudança de base é realizada pela multiplicação do vetor local  $\vec{p}_B = (\alpha, \beta, \gamma)$  na base  $B$  por uma matriz de transformação  $M$  para  $B$  resultando em um vetor na base canônica (global)  $\vec{p}_G$ , que relaciona as duas bases:

$$\vec{p}_G = M \cdot \vec{p}_B = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \vec{u} \cdot \alpha + \vec{v} \cdot \beta + \vec{w} \cdot \gamma$$

Por fim, temos o retorno,

$$\vec{p}_B = M^{-1} \cdot \vec{p}_G$$

---

Por exemplo, considera a base canônica no  $\mathbb{R}^2$   $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$  e uma base rotacionada  $B = \{(1, 1), (-1, 1)\}$  e um vetor  $\vec{p} = (0, 2)$ , temos

$$\vec{p}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = M \cdot \vec{p}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{u} \cdot \alpha + \vec{v} \cdot \beta$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \beta$$

resolvendo o sistema temos,

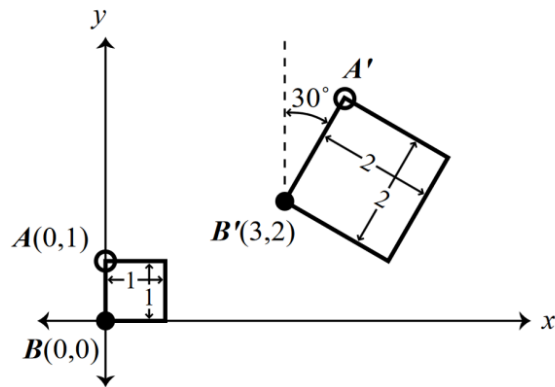
$$\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\alpha + \beta = 2 \rightarrow \beta + \beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$$

$$\therefore \alpha = \beta = 1$$

## 2 Lista 1

1. **[Vetores e Operações]** Dados os vetores  $\vec{A} = (3, 4, 0)$  e  $\vec{B} = (1, -2, 0)$ ,
2. **[Composição de transformações]** O diagrama abaixo mostra uma composição de transformações 2D aplicada a um quadrado unitário.



Essa composição pode ser descrita através de uma série de transformações mais simples. Descreva cada uma dessas transformações simples e obtenha a matriz de transformação resultante usando coordenadas homogêneas. Escreva o código OpenGL correspondente a essas transformações. Usando a matriz encontrada, obtenha também as coordenadas  $(x,y)$  do ponto  $A'$ , correspondente à imagem do ponto  $A$ . Dicas:  $\sin -x = -\sin x$ ,  $\cos -x = \cos x$ ,  $\sin 30 = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**R(7):**

Nesta questão temos que definir a ordem das matrizes de transformação de forma local, ou seja  $T(t_x, t_y) \cdot R_z(\theta) \cdot S(s_x, s_y)$ , Translação, Rotação em  $z$  e Escala. Porém como é uma pilha de transformações o resultado final fica em termos das coordenadas homogêneas:

Sabendo das matrizes,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos, o vértice resultante  $\vec{v}'$ , do ponto  $A'$ , é obtido após aplicar as transformações ao vértice  $\vec{v}$ , ponto  $A$ .

$$\vec{v}' = (T \cdot R_z \cdot S) \cdot \vec{v}$$

Portanto, sabendo que  $\vec{v} = (0, 1)$ ,  $\theta = -30$ ,  $t_x = 3$ ,  $t_y = 2$ ,  $s_x = 2$  e  $s_y = 2$ , temos

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}' = (4, \sqrt{3} + 2)$$

